Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Национални зимни математически състезания „Атанас Радев“

Ямбол, 29 януари 2022 г.

София, 2022 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Пресметнете x, ако $x^2 + p = qx$, $p = (32 + \sqrt{2})(9 - \sqrt{8})^{-1}$ и $q = \sqrt{9 + \sqrt{8} - \sqrt{24} - \sqrt{48}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{55 - 14\sqrt{6}}$.

Отговор. $2 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$.

Решение. Имаме

$$p = \frac{32 + \sqrt{2}}{9 - \sqrt{8}} = \frac{(32 + \sqrt{2})(9 + 2\sqrt{2})}{81 - 8} = \frac{288 + 64\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 4}{73} = 4 + \sqrt{2}$$

и

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{6 + 2 + 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2.6}} + \sqrt{2 + 1 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{49 + 6 - 2.7\sqrt{6}} \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) + (7 - \sqrt{6}) = 5 \end{aligned}$$

(тук използвахме $\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow 6 > 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$, както и очевидните $\sqrt{2} > 1$ и $7 > \sqrt{6}$). Уравнението $x^2 - 5x + 4 + \sqrt{2} = 0$ има дискриминанта $D = 5^2 - 4(4 + \sqrt{2}) = 8 + 1 - 2\sqrt{8} = (\sqrt{8} - 1)^2$ и решения $x_1 = \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{2} - 1) = 2 + \sqrt{2}$ и $x_2 = \frac{1}{2}(5 - 2\sqrt{2} + 1) = 3 - \sqrt{2}$.
Оценяване. (6 точки) 2 т. за правилно пресмятане на p; 2 т. за правилно пресмятане на q; 2 т. за правилно решаване на вярното уравнение.

Задача 8.2. Даден е триъгълник ABC с $\angle ABC = 50^\circ$. Нека M и N са средите съответно на AC и BC, P е средата на BM и Q е средата на CM. Известно е, че съществува правоъгълен триъгълник с дължини на страните, равни на дължините на отсечките CP, BQ и MN. Да се намери ъгъла между правите CP и AB.

Отговор. 65° или 90°.

Решение. Нека CP, BQ и MN се пресичат в медицентъра G на триъгълника BCM и нека CP пресича AB в точката R. Тогава $\angle GMB = \angle PBR$ като кръстни в $MN \parallel AB$ (MN е средна отсечка в ABC), $\angle BPR = \angle MPG$ като връхни и $MP = PB$, откъдето $\triangle MGP \cong \triangle BRP$, което дава $BR = MG = \frac{2}{3}MN$ и $GR = 2GP = \frac{2}{3}CP$.
Следователно страните на BGR са с дължини, равни на две трети от дължините на CP, BQ и MN и сега от условието получаваме, че BGR е правоъгълен триъгълник. Наистина, ако триъгълник със страни $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}b$ и $\frac{2}{3}c$ е правоъгълен с прав ъгъл срещу $\frac{2}{3}c$, то това е вярно и за този със страни a, b и c, понеже Питагоровата теорема за първия дава $(\frac{2}{3})^2a^2 + (\frac{2}{3})^2b^2 = (\frac{2}{3})^2c^2$, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$ и значи вторият също изпълнява тази теорема. (Това може да се докаже и чрез въвеждане на точки, които делят страните b и c на три равни части и използване на получените средни отсечки.)
Ако $\angle GBR = 90^\circ$, то $50^\circ = \angle ABC > 90^\circ$, невъзможно.
Ако $\angle BGR = 90^\circ$, то с $GR = GC$ от по-горе получаваме $BR = BC$ и $\angle BRC = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} = 65^\circ$. Последната възможност е $\angle BRG = 90^\circ$.
За да сме сигурни, че ъглите 65° и 90° наистина не водят до невъзможни конфигурации, нека покажем накратко как да построим такива – започваме от триъгълник BRC с

$\angle ABC = 50^\circ$, $\angle BCR = \angle BRC = 65^\circ$ или $\angle RBC = 50^\circ$, $\angle BRC = 90^\circ$ и върху отсечката CR построяваме P и G, такива че $CP = 3PR$ и $CG = GR$; след това всяка друга точка се възстановява еднозначно чрез построяването на среда или успоредна права или пресичане на прави. Проверката, че CP, BQ и MN образуват правоъгълен триъгълник е с аргументи, аналогични на такива от решението.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за въвеждането на R и $\triangle MGP \cong \triangle BRP$; 1 т. за $BR = MG = \frac{2}{3}MN$ и $GR = 2GP = \frac{2}{3}CP$; 1 т. за предположението, че BGR е правоъгълен триъгълник понеже страните му са $\frac{2}{3}$ от CP, BQ и MN; 1 т. за обосновка, че ако триъгълник със страни $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}c$ е правоъгълен то този с a, b, c също е; 1 т. за случая $\angle BGR = 90^\circ$; общо 1 т. за случаите $\angle GBR = 90^\circ$ и $\angle BRG = 90^\circ$ (точката не се присъжда, ако поне един е пропуснат). Не се отнема точка при липса на аргументи, че ъглите 65° и 90° наистина се реализират.

Задача 8.3. Да се реши в цели числа уравнението $a = a^3 - 8a^2b + 21ab^2 - 18b^3$.

Отговор. $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(9,4)$, $(-9,-4)$, $(16,6)$ и $(-16,-6)$

Решение. Дясната страна се разлага до

$$(a^3 - 8b^3) - 8a^2b + 16ab^2 + 5ab^2 - 10b^3 = (a-2b)(a^2+2ab+4b^2) - 8ab(a-2b) + 5b^2(a-2b)$$

$$= (a-2b)(a^2 - 6ab + 8b^2) = (a-2b)(a-3b)^2.$$

Да положим $n = a - 3b$. Получаваме $3a = n^2(3a-6b) = n^2(2n+a)$, откъдето $(3-n^2)a = 2n^3$. При $n = 0$ следват $a = 0$ и $b = 0$; при $n = \pm 1$ получаваме $a = \pm 1$ и $b = 0$; при $n = \pm 2$ получаваме $a = \mp 16$ и $b = \mp 6$; при $n = \pm 3$ получаваме $a = \mp 9$ и $b = \mp 4$; при $n = \pm 4$ лявата страна се дели на 13, а дясната – не; при $n = \pm 5, \pm 6$ лявата страна се дели на 11, а дясната – не. От друга страна, при $|n| \geq 7$ тъй като $3 - n^2 \neq 0$ и

$$a = \frac{2n^3}{3-n^2} = \frac{6n}{3-n^2} - 2n$$

и $n^2 - 3 > 6|n|$ (еквивалентно на $|n|(|n|-6) > 3$), то a не е цяло число.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за верен отговор; 1 т. за пълно разлагане на дясната страна; 2 т. за полагане, при което впоследствие една от двете получени променливи участва само на първа степен; 1 т. за представяне на тази променлива като израз на другата, 2 т. за отхвърляне на $|n| \geq 7$ (или съответстващото при друго работещо полагане).

Задача 8.4. Равностранен триъгълник с лице n^2 е разделен на n^2 равностранни триъгълничета с единични лица посредством прави, успоредни на страните му. Върховете на триъгълничетата ще наричаме *възли.* Намерете, като многочлен на n, разложен на неразложими множители, сбора от лицата на всички равностранни триъгълници с върхове три от възлите.

Отговор. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n^2+3n+6)}{240}$

Решение. Всеки от търсените равностранни триъгълници T може да се потопи в единствен равностранен триъгълник M, еднакво ориентиран с най-големия, чиито страни минават през върховете на T. (Ако разгледаме страната AB на T, то има единствен възел C, такъв че триъгълникът ABC с $\angle ACB = 60^\circ$ е външен за T и страните AC и BC са успоредни на страните на големия триъгълник.) Ако M има k пъти по-голяма страна от на единичен триъгълник ($k = 1, 2, \ldots, n$), то има $1 + 2 + \cdots + (n + 1 - k) = \binom{n+2-k}{2}$ възможности за M, а сумата от лицата на възможните T можем да определим както следва: номерираме възлите по коя да е от страните на M с $0, 1, \ldots, k$ и съобразяваме, че има точно един равностранен триъгълник с връх в i-тия възел за $i = 1, 2, \ldots, k$, с лице $k^2 - 3i(k - i)$; така сумата от лицата на възможните T е

$$\sum_{i=1}^{k}(k^2 - 3i(k-i)) = k^3 - 3\binom{k+1}{3} = \frac{k^3+k}{2}.$$

Тук използваме, че $\sum_{i=1}^{k} i(k-i) = \binom{k+1}{3}$, което може да се докаже например чрез преброяване на думите с 3 „а“ и $k-2$ „б“, при които средното „а“ е на 2-ро, 3-то, …, k-то място. (Алтернативно, приложете известните равенства $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ и $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.) Така търсеният сбор е

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+k}{2}\binom{n+2-k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^3\binom{n+2-k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n+2-k}{2}.$$

За да пресметнем втората сума, можем или да приложим известните равенства $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$, или да постъпим както следва. Да преброим думите с 4 „а“ и $n-1$ „б“, при които второто „а“ е на $(k+1)$-во място; имаме k избора за мястото на първото „а“ и $n+3-(k+1) = n+2-k$ избора за местата на последните две „а“. Следователно

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n+2-k}{2} = \binom{n+3}{4}.$$

Да разгледаме сега първата сума. При директен алгебричен подход са необходими равенствата $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$ и $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$, които могат да се изведат така: ако например $A_{n,4} = \sum_{k=1}^{n} k^4$, то

$$\begin{aligned}
n^5 &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^5 - (k-1)^5\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(5k^4 - 10k^3 + 10k^2 - 5k + 1\right)\\
&= 5A_{n,4} - 10\sum_{k=1}^{n}k^3 + 10\sum_{k=1}^{n}k^2 - 5\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1
\end{aligned}$$

и чрез изразите за $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ и $\sum_{k=1}^{n} k^3$ получаваме израз за $\sum_{k=1}^{n} k^4$; аналогично чрез тези четири и $n^6 = \sum_{k=1}^{n}(k^6 - (k-1)^6)$ извеждаме и за $\sum_{k=1}^{n} k^5$.
Нека сега покажем и комбинаторен подход за пресмятане на първата сума. Да разгледаме жилищен блок с етажи $0, 1, \ldots, n+2$ и да преброим вариантите за разполагане в него на

Ади, Ани, Ася, Боян, Васил и Гошо, при които Гошо живее по-високо от Васил, Васил – по-високо от Боян и Боян – по-високо от момичетата (сред които може да има такива на един етаж). Ако Боян е на етаж k ($k = 1, 2, \ldots, n$), то за етажа на всяко от момичетата има по k избора, а за етажите на Васил и Гошо има $\binom{n+2-k}{2}$ избора, така че получаваме желаната сума. От друга страна:

- ако децата населяват 4 етажа, вариантите за това са $\binom{n+3}{4}$ (трите момичета са на един етаж).
- ако децата населяват 5 етажа, вариантите за това са $3.2.\binom{n+3}{5}$ (има 3 избора кое от момичетата да е само на етаж и 2 избора на кой от двата избрани най-долни етажа да е то).
- ако децата населяват 6 етажа, вариантите за това са $3!.\binom{n+3}{6}$ (има 3! варианта за разполагане на момичетата на трите най-долни избрани етажа).

Следователно

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n+2-k}{2} = \binom{n+3}{4} + 6\binom{n+3}{5} + 6\binom{n+3}{6} = \binom{n+3}{4} + 6\binom{n+4}{6}.$$

Окончателно търсеният сбор е

$$\binom{n+3}{4} + 3\binom{n+4}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n^2+3n+6)}{240}.$$

Оценяване. (7 точки) 2 т. за пресмятане на сбора на лицата на всички T в даден M; 1 т. за правилно изразяване на търсения сбор чрез сумационен символ (или еквивалентен вид); 1 т. за доказване на затворена формула за втората сума; 2 т. за доказване на затворена формула за първата сума; 1 т. за завършване.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които решенията на системата

$$\left| \begin{array}{l} |x-2| + |x-1| + |x+3| \leq 6 \\ x^2 - ax + 2a \leq 0 \end{array} \right.$$

представляват затворен интервал с дължина 1.

Отговор. $a = -1$.

Решение. Лесно се вижда, че решението на линейното неравенство е $x \in [0, 2]$. Например, това може да стане чрез нанасяне върху реалната ос на точките $A(-3)$, $B(1)$ и $C(2)$, както и съобразяване, че търсим позицията на точка $X(x)$ със сума от разстоянията до трите фиксирани точки по-малка или равна на 6. Тъй като $CA = 5$, а B се намира между A и C, директно се съобразява, че горното е възможно единствено, когато X е в единична околност на B.

Да означим с $f(x) := x^2 - ax + 2a$. Решението на квадратното неравенство е $x \in [x_1, x_2]$, където $x_{1,2}$ са реалните корени (ако има такива) на $f(x) = 0$. Следователно, търсим тези стойности на параметъра a, за които $f(x) = 0$ има два реални корена $x_{1,2}$, за които $\Big|[x_1, x_2] \cap [0,2]\Big| = 1$. Тъй като $f(2) = 4 > 0$, то възможни са два случая: $x_1 \le 0 < x_2 = 1$ или $0 \le x_1 < x_2 = x_1 + 1 \le 2$. Първият случай води до $0 = f(1) = 1 - a + 2a = 1 + a$ и значи $a = -1$. Тъй като $f(0) = 2a = -2 < 0$, то наистина $x_1 < 0 < x_2 = 1$ е изпълнено и $a = -1$ е решение.
Вторият случай води до $f(0) \ge 0$, т.е., $a \ge 0$ и връх на параболата $a/2 \in (0,2)$, което сумарно е $a \in (0,4)$. Искаме наличие на два различни реални корена, което води до $0 < D = a^2 - 8a = a(a-8)$, т.е., $a \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$. Следователно няма решение в този случай.

Оценяване. (6 точки) 1т. за $x \in [0,2]$; 1т. за формулиране на двата възможни случая $x_1 \le 0 < x_2 = 1$ или $0 \le x_1 < x_2 = x_1 + 1 \le 2$; по 2т. за пълното разглеждане на всеки от случаите.

Задача 9.2. В остроъгълния триъгълник ABC, M е среда на AB и AH е височина. Построен е перпендикуляр CP към правата MH. Да се намери дължината на AC, ако $AB = 21$, $BH = 7$ и $BP = CP$.

Решение. Построяваме $PE \perp BC$ и означаваме $\measuredangle ABC = \beta$. HM е медиана в правоъгълен триъгълник, следователно $\measuredangle MHA = 90^\circ - \beta$ и $\measuredangle PHC = 180^\circ - \measuredangle MHA - \measuredangle AHC = \beta$. Оттук, $\measuredangle PCH = 90^\circ - \beta$. Следователно, $\triangle ABH \sim \triangle PHE \sim \triangle CPH$ и значи

$$\frac{7}{21} = \frac{BH}{AB} = \frac{EH}{HP} = \frac{PH}{CH}. \qquad (1)$$

Нека означим $EH = x$. Тогава $PH = 3x$, $CH = 9x$, $CE = 9x - x = 8x$ и, тъй като $BP = CP$, то $BE = 8x$ и $BH = 7x$, т.е., $x = 1$. Остана да намерим AC с Питагорова теорема:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BH^2 + CH^2} = \sqrt{21^2 - 7^2 + 9^2} = \sqrt{473}.$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за (1); 2 т. за $EH = 1$; 2т. за $AC = \sqrt{473}$.

Задача 9.3. Да се намери броя на всички съставни естествени числа $4 \le n \le 2022$, такива че за всяко естествено число k в интервала $[1, \sqrt{n} - 1]$ е изпълнено следното: броят начини от група от n души да изберем k на брой (като редът на избор няма значение) се дели на n.

Решение. Нека първо охарактеризираме всички такива числа. Условието изисква $\binom{n}{k}$ да се дели на n за всяко $1 \le k \le \sqrt{n} - 1$.
Да допуснем, че n има прост делител $p \le \sqrt{n} - 1$ и да разгледаме $k = p$. Явно $p!\binom{n}{p} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ и ако допуснем, че $\binom{n}{p}$ се дели на n, то след $\binom{n}{p} = ns$ и съкращаване на n би следвало, че p дели $(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ – това обаче не е така, тъй като p дели n и значи не дели никое $n - \ell$, $1 \le \ell \le p - 1$.

Значи вече можем да считаме, че всички прости делители на n са по-големи от $\sqrt{n}-1$. Да допуснем, че простите делители са поне 3 на брой (считано с техните кратности). За $n=8$ директна проверка показва, че е решение, а при $n=12$ имаме делителят $2<\sqrt{12}-1$; нека $n\geq 16$. Тогава $n>(\sqrt{n}-1)^3\geq(\frac{3\sqrt{n}}{4})^3=\frac{27n^{3/2}}{64}$, т.е. $n<(\frac{64}{27})^2<9$, противоречие.
Остава да разгледаме $n=pq$ за прости $\sqrt{n}-1<p\leq q$. Ако допуснем, че $q\geq p+3$, то $n\geq p(p+3)>(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+2)=n+\sqrt{n}-2>n$, противоречие. При $q=p+1$ имаме само $p=2$, $q=3$, т.е. $n=6$, за което директно се проверява, че е решение.
Ако $q=p$ и $1\leq k\leq p-1$, то в $k!\binom{p^2}{k}=(p^2-k+1)(p^2-k+2)\cdots(p^2-1)p^2$ дясната страна се дели на p^2, но $k!$ вляво не се дели на p – значи p^2 дели $\binom{p^2}{k}$. Ако $q=p+2$ и $1\leq k\leq p-1$, то в $k!\binom{p^2+2p}{k}=(p^2+2p-k+1)(p^2+2p-k+2)\cdots(p^2+2p-1)(p^2+2p)$ дясната страна се дели на p и $p+2$; а $k!$ не се дели на p и на простото $q=p+2$ – следователно $\binom{p^2+2p}{k}$ се дели на p и на $p+2$, а оттук и на $p(p+2)$.
Тъй като $2022<2025=45^2$, то всички прости числа $2\leq p<45$ водят до решение $n=p^2$, а пък тези, за които и $p+2$ е просто – водят и до решението $n=p(p+2)$. Директна проверка показва, че имаме 14 прости числа в този интервал:

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43\},$$

като 6 от тях $\{3,5,11,17,29,41\}$ са от втория тип. Заедно с "изключенията" 6 и 8, заключаваме, че търсения брой в задачата е: $14+6+2=22$.

Оценяване. (7 точки) По 1 т. за всеки от случаите $n=p^2$ и $n=p(p+2)$, 1 т. за отхвърляне на съставните n с прост делител $p\leq\sqrt{n}-1$; 1 т. за отхвърляне на n с поне три прости делителя; 2 т. за довършване; 1 т. за верен отговор.

Задача 9.4. В една държава има n града. Между някои градове са построени еднопосочни пътища, като между 2 града може да има няколко пътища в различни посоки. Знаем, че за всеки 2 града A и B може да се стигне или от A до B, или от B до A или и двете. Колко най-малко пътя трябва допълнително да построим, така че да си гарантираме, че от всеки град може да се стигне до всеки друг?

Решение. Ще докажем, че отговора е 1. Първо да разгледаме примера, в който номерираме градовете от 1 до n и от всеки град i излиза път към град $i+1$, $\forall i<n$. Очевидно условието е изпълнено и трябва да построим поне един път, следователно отговора не е 0.
Ще докажем, че има град F който стига до всички останали градове. Да допуснем, че няма такъв и да разгледаме града A, който стига до най-много градове. Сега знаем, че има град B и A не може да стигне до B. Но тогава, от условието B може да стигне до A, а оттам и до всеки друг град до който може да се стигне през A. Противоречие с максималността на A.
Аналогично, има град L, такъв че от всеки град може да се стигне до него. Следователно можем да построим реброто от L до F и за произволни два града A и B имаме пътя $\{A\to F\}\cup\{F\to L\}\cup\{L\to B\}$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за пример, че е нужен поне 1 допълнителен път; по 2 т. за доказване съществуването на градове F и L, както и за проверката, че пътя $L\to F$ е достатъчен.

Задача 10.1. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите P. Нека K и L са точки от отсечките CP и DP съответно, такива че описаната около триъгълника PKL окръжност се допира до CD в точка M. Нека X и Y са точки съответно от отсечките AP и BP, такива че $AX = CK$ и $BY = DL$. Точките Z и T са средите на PK и PL, съответно. Ако точките C, D, X и Y лежат на една окръжност, да се докаже, че $\measuredangle MZP = \measuredangle MTP$.

Решение. От вписаните $ABCD$ и $CDXY$ следва $\measuredangle CXY = \measuredangle CDY = \measuredangle CAB$, т.е. $AB \parallel XY$. От теоремата на Талес следва $\frac{PA}{PB} = \frac{AX}{BY}$, а с условията $AX = CK$, $BY = DL$ и подобието $\triangle ABP \sim \triangle DCP$ достигаме до $\frac{PD}{PC} = \frac{CK}{DL}$, т.е. $DL \cdot DP = CP \cdot CK$. Сега от триъгълниците MLP и MKP с допирателни DM и CM следва $CM^2 = CP \cdot CK = DL \cdot DP = DM^2$, т.е. M е средата на CD.
Нека точката Q е такава, че $PCQD$ е успоредник. Тогава MZ и MT са средни отсечки в триъгълниците PKQ и PLQ и значи исканото е еквивалентно на $\measuredangle QKC = \measuredangle QLD$. Понеже $\measuredangle QCK = \measuredangle QDL$ от успоредника $PCQD$, достатъчно е да докажем, че $\triangle QCK \sim \triangle QDL$, т.е. $\frac{QC}{QD} = \frac{CK}{DL}$. Но $QC = DP$ и $QD = CP$, така че последното е еквивалентно на полученото по-горе $\frac{PD}{PC} = \frac{CK}{DL}$, с което задачата е решена.
Оценяване. (6 точки) 1 т. за $AB \parallel XY$; 1 т. за $DL \cdot DP = CP \cdot CK$; 1 т. за заключението, че M е средата на CD; 1 т. за свеждане до $\measuredangle QKC = \measuredangle QLD$; 1 т. за идеята да се докаже $\triangle QCK \sim \triangle QDL$ по две страни и ъгъл между тях; 1 т. за завършване.

Коментар. След $CM = DM$ задачата може да се довърши и само чрез центъра на описаната около PKL окръжност.

Задача 10.2. Да се намерят всички двойки реални числа (x, y), за които

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+y^2+4y+5}+\sqrt{x^2-8x+y^2-4y+20}=5\\ 16x^2+9y^2=68.\end{array}\right.$$

Решение. Ще покажем, че първото уравнение е еквивалентно на $3y = 4x - 10$ при $x \in [1, 4]$. Един вариант на доказателство е двукратно повдигане на квадрат и решаване на полученото квадратно уравнение. Ще предложим по-елегантна алтернатива. Да разгледаме правоъгълна координатна система в равнината и точките $A(1, -2)$ и $B(4, 2)$. Тъй като

$$\sqrt{x^2-2x+y^2+4y+5}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$$
$$\sqrt{x^2-8x+y^2-4y+20}=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2},$$

то решения на първото уравнение са всички точки $C(x, y)$, за които $|CA| + |CB| = 5$. Но

$$|AB|=\sqrt{(4-1)^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{16+9}=5=|CA|+|CB|,$$

следователно точката C лежи върху отсечката AB. Уравнението на правата AB е $3y = 4x - 10$ и значи търсим решения на второто равенство в условието, удовлетворяващи едновременно горната зависимост, както и $x \in [1, 4]$. Така, сведохме задачата до решаване на квадратното уравнение

$$32x^2 - 80x + 100 = 68 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 2.$$

Единствено x_2 е в интервала $[1, 4]$ и значи единственото решение на системата е двойката $(2, -2/3)$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за $\{3y = 4x - 10\} \cup \{x \in [1, 4]\}$; 1 т. за решаване на квадратното уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$; по 1 т. за разглеждане всеки от корените $x_{1,2}$.

Задача 10.3. Съставно естествено число n ще наричаме *балансирано*, ако за всяко естествено число k в интервала $[1, \sqrt{n} - 1]$ броят начини от група от n души да изберем k на брой (като редът на избор няма значение) се дели на n. Да се намери най-малката възможна абсолютна разлика $|m - n|$ между две петцифрени балансирани числа.

Отговор. 202.

Решение. Нека първо охарактеризираме всички балансирани числа. Условието изисква $\binom{n}{k}$ да се дели на n за всяко $1 \leq k \leq \sqrt{n} - 1$.

Да допуснем, че n има прост делител $p \leq \sqrt{n} - 1$ и да разгледаме $k = p$. Явно $p!\binom{n}{p} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ и ако допуснем, че $\binom{n}{p}$ се дели на n, то след $\binom{n}{p} = ns$ и съкращаване на n би следвало, че p дели $(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ – това обаче не е така, тъй като p дели n и значи не дели никое $n - \ell$, $1 \leq \ell \leq p - 1$.

Значи вече можем да считаме, че всички прости делители на n са по-големи от $\sqrt{n} - 1$. Да допуснем, че простите делители са поне 3 на брой (считано с техните кратности). За $n = 8$ директна проверка показва, че е решение, а при $n = 12$ имаме делителят $2 < \sqrt{12} - 1$; нека $n \geq 16$. Тогава $n > (\sqrt{n} - 1)^3 \geq (\frac{3\sqrt{n}}{4})^3 = \frac{27n^{3/2}}{64}$, т.е. $n < (\frac{64}{27})^2 < 9$, противоречие.

Остава да разгледаме $n = pq$ за прости $\sqrt{n} - 1 < p \leq q$. Ако допуснем, че $q \geq p + 3$, то $n \geq p(p+3) > (\sqrt{n} - 1)(\sqrt{n} + 2) = n + \sqrt{n} - 2 > n$, противоречие. При $q = p + 1$ имаме само $p = 2$, $q = 3$, т.е. $n = 6$, за което директно се проверява, че е решение.

Ако $q = p$ и $1 \leq k \leq p - 1$, то в $k!\binom{p^2}{k} = (p^2 - k + 1)(p^2 - k + 2)\cdots(p^2 - 1)p^2$ дясната страна се дели на p^2, но $k!$ вляво не се дели на p – значи p^2 дели $\binom{p^2}{k}$. Ако $q = p + 2$ и $1 \leq k \leq p - 1$, то в $k!\binom{p^2+2p}{k} = (p^2 + 2p - k + 1)(p^2 + 2p - k + 2)\cdots(p^2 + 2p - 1)(p^2 + 2p)$ дясната страна се дели на p и $p + 2$; а $k!$ не се дели на p и на простото $q = p + 2$ – следователно $\binom{p^2+2p}{k}$ се дели на p и на $p + 2$, а оттук и на $p(p + 2)$.

Окончателно, всички петцифрени балансирани числа са от един от двата вида: p^2 или $p(p + 2)$, където p и $p + 2$ са прости. Тъй като $p(p + 2) = (p + 1)^2 - 1 < (p + 1)^2$, то най-малката абсолютна разлика между две петцифрени числа ще бъде равна на $2p$, където p е най-малкото просто число, при което $p + 2$ също е просто, а p^2 и $p(p + 2)$ – са петцифрени. Най-малкото петцифрено число е $10000 = 10^4$, т.е., търсим $p \geq 100$. Директно се проверява, че 101 и 103 са прости числа, следователното съответните 5-цифрени балансирани числа са 101^2 и $101 \cdot 103$, чиято абсолютна разлика е $2 \cdot 101 = 202$.

Оценяване. (7 точки) По 1 т. за всеки от случаите $n = p^2$ и $n = p(p+2)$, 1 т. за отхвърляне на съставните n с прост делител $p \leq \sqrt{n} - 1$; 1 т. за отхвърляне на n с поне три прости делителя; 3 т. за довършване.

Задача 10.4. Дадени са естествените числа $m < n$. Да се намери броя на различните инективни функции $f : \{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ такива, че за всяко непразно подмножество $A \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, множеството от стойности $f(A)$ да не съвпада с A ($f(A) \neq A$).
(Една функция f се нарича инективна, ако $f(x) \neq f(y)$ когато $x \neq y$.)

Отговор. $\dfrac{(n-1)!}{(n-m-1)!}$.

Решение. Ще използваме означението $B_i = \{1, 2, \dots, i\}$. С индукция по m ще докажем, че за всяко $n > m$ броят на инекциите $f : B_m \to B_n$, удовлетворяващи условието е $(n-1)(n-2)\dots(n-m)$.
При $m = 1$ искаме $f(1) \neq 1$, т.е., имаме $n - 1$ възможни стойности, с което базата е доказана. Нека твърдението е вярно за $m - 1$ и да разгледаме $f : B_m \to B_n$, изпълняваща условието за произволно непразно подмножество на B_{m-1}.
1 сл. $m \notin f(B_{m-1})$. Тогава имаме m "забранени" стойности за $f(m)$: $f(B_{m-1}) \cup \{m\}$. Първите – заради инективността на функцията, а последната – защото $= \{m\}$ не би изпълнявала условието. Следователно, "разрешени" са $n - m$.
2 сл. $m \in f(B_{m-1})$. Нека $a_1 = f^{-1}(m) \in B_{m-1}$ е праобраза на m. Аналогично, ако $a_1 \in f(B_{m-1})$, то нека $a_2 = f^{-1}(a_1) \in B_{m-1}$ и т.н. Тъй като $m \in f(B_{m-1})$, но $m \notin B_{m-1}$ и двете множества са равномощни поради инективността, ще достигнем до число $a_k \in B_{m-1}$, такова че $f(a_k) = a_{k-1} \in f(B_{m-1})$, но $a_k \notin f(B_{m-1})$. Тогава "забранени" стойности за $f(m)$ са $f(B_{m-1}) \cup \{a_k\}$ (отново – първите поради инективност, а последната поради проблем с множеството $A' = \{a_1, a_2, \dots, a_k, m\}$). Обратно, всички останали $n - m$ стойности са "разрешени". Наистина да разгледаме произволно непразно $A \subseteq B_m$. Ако $m \notin A$, то $f(A) \neq A$, съгласно индукционната хипотеза. Ако $m \in A$ и $f(A) = A$, то от $m \in f(A)$, следва че $a_1 \in A$ и, както и по-горе, $A' \subseteq A$. Но тогава $a_k \in A$ и $a_k \notin f(B_m) \notin f(A)$ – противоречие.
Следователно и при двата случая имаме по $n - m$ "разрешени" стойности, т.е., съгласно индукционната хипотеза отговора е $(n-1)(n-2)\dots(n-m)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отговор; 1 т. за разглеждане на малки случаи за m (индукционна база); 1 т. за 1 сл.; 4 т. за 2 сл.

Задача 11.1. Дадено е уравнението

$$(x^2 - 8x + 7)^2 + (3m - 1)(x^2 - 8x + 7) + 2m^2 - m = 0,$$

където m е реален параметър.
а) Да се определи броят на решенията на уравнението при $m = 6$.
б) Да се намерят стойностите на параметъра m, при които уравнението има точно три различни реални корена.

Решение. Полагаме $t = x^2 - 8x + 7$ и уравнението добива вида

$$t^2 + (3m - 1)t + 2m^2 - m = 0.$$

а) При $m = 6$ получаваме $t^2 + 17t + 66 = 0$, откъдето $t_1 = -11$ и $t_2 = -6$. Тъй като най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 - 8x + 7$ е $f(4) = -9$, и $t_1 < -9$, $t_2 > -9$, то уравнението има две различни реални решения.

б) Необходимо условие за това е уравнението $t^2 + (3m-1)t + 2m^2 - m = 0$ да има решение t_0, такова че $x^2 - 8x + 7 - t_0 = 0$ има единствено решение, т. е. $D = 9 + t_0 = 0$, т. е. $t_0 = -9$. Като заместим в $t^2 + (3m-1)t + 2m^2 - m = 0$, достигаме до $m^2 - 14m + 45 = 0 \iff (m-9)(m-5) = 0$.
При $m = 9$ получаваме $t^2 + 26t + 153 = 0$, откъдето намираме $t_1 = -17$ и $t_2 = -9$ и използвайки а) получаваме, че уравнението има точно две различни реални решения.
При $m = 5$ получаваме $t^2 + 14t + 45 = 0$, откъдето намираме $t_1 = -5$ и $t_2 = -9$. Оттук решенията са 2,4 и 6.

Оценяване. (6 точки) а) 1 т. за определяне на най-малката стойност на израза x^2-8x+7, 1 т. за намиране на корените $t_1 = -11$ и $t_2 = -6$ и 1 т. за извода; б) 1 т. за намиране стойността на t_0, при която уравнението има двоен корен и съответните стойности на $m = 9$ и $m = 5$; по 1 т. за изводите за броя на реалните решения при $m = 9$ и $m = 5$.

Задача 11.2. Дължините на страните и на диагонала AC на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$ са цели числа. Ако

$$\cos\measuredangle ABC = \frac{1}{4}, \quad 2CD = AD + AC \text{ и } \ 2AB = CA + CB + CD$$

намерете най-малката възможна стойност за периметъра на $ABCD$.

Решение. Нека $\alpha = \measuredangle ABC$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ и $AC = e$. Тогава $\measuredangle ADC = 180^\circ - \alpha$, $2c = d + e$ и $2a = b + e + c$ и от косинусовата теорема за $\triangle ADC$ имаме

$$d^2 + c^2 + \frac{dc}{2} = e^2 = (2c-d)^2 \iff 2c = 3d.$$

Сега от $2c = d+e$ намираме $e = 2d$, а от $2a = b+e+c$ намираме $2a = b+\dfrac{7e}{4}$. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме

$$a^2 + b^2 - \frac{ab}{2} = e^2 = \left(\frac{4}{7}(2a-b)\right)^2 \iff 33b^2 + \frac{79ab}{2} - 15a^2 = 0.$$

Тъй като корените на уравнението $33x^2 + \frac{79x}{2} - 15 = 0$ са $x_1 = \dfrac{10}{33}$ и $x_2 < 0$, то $\dfrac{b}{a} = \dfrac{10}{33} \iff b = \dfrac{10a}{33}$. Сега от $2a = b + \dfrac{7e}{4}$ намираме $a = \frac{33e}{32} = \frac{33d}{16}$ и $b = \frac{5d}{8}$. Окончателно

$$a = \frac{33d}{16}, b = \frac{5d}{8}, c = \frac{3d}{2}, e = 2d.$$

Най-малката стойност на d, за която a е цябо число е $d = 16$. Тогава $AB = 33$, $BC = 10$, $CD = 24$, $DA = 16$, $AC = 32$ и търсената най-малка стойност е равна на 83.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за $2c = 3d$ и $e = 2d$; 2 т. за $b = \dfrac{10a}{33}$; 1 т. за $a = \dfrac{33d}{16}$; 1 т. за $b = \dfrac{5d}{8}$; 1 т. за получаване на отговора.

Задача 11.3. Естествено число n с 2022 делители $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{2022} = n$ се нарича *красиво*, ако $3d_{2017} + 2d_{2019} = n$. Намерете всички красиви числа.

Решение. От $d_i \geq i$ и $d_6.d_{2017} = d_4.d_{2019} = n$ получаваме

$$2n = 6.d_{2017} + 4.d_{2019} \leq d_6.d_{2017} + d_4.d_{2019} = 2n.$$

Следователно $d_6 = 6$, откъдето $d_i = i$ за $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и получаваме, че n се дели на $2^2.3.5$. От $2022 = 2.3.337$ и 337 е просто число, следва, че $n = 2^x.3^y.5^z$ за $x \geq 2$. Всички красиви числа са:

$$2^2.3.5^{336}, 2^2.3^{336}.5, 2^{336}.3.5^2, 2^{336}.3^2.5.$$

Оценяване. (7 точки) 3 т. за $d_i = i$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; 2 т. за $n = 2^x.3^y.5^z$ при $x \geq 2$; 2 т. за намиране на четирите красиви числа.

Задача 11.4. За естественото число $n > 3$ множество A от редици от 0 и 1 с дължина $n+1$ се нарича *добро*, ако всяка редица от 0 и 1 с дължина n може да се получи от редица от A с изтриване на един член.

Ако a_n е минималния брой елементи на добро множество, да се докаже, че:

$$\frac{2^n + 2n - 7}{n} \leq a_n \leq 2^{n-1}.$$

Решение. Нека B е множеството от всички редици от 0 и 1 с дължина $n-1$, като $|B| = 2^{n-1}$. Очевидно множеството A, получено с прибавяне на 01 към края на всяка редица от B е добро. Следователно $a_n \leq 2^{n-1}$.

Редица с дължина n, съставена само от нули може да се получи или от редица с дължина $n+1$ само с нули или от редица с дължина $n+1$ с точно една единица. И в двата случая редиците, които могат да се получат с изтриване на един член са най-много 3.

Аналогично от редица с дължина $n+1$ само с единици или само с една нула могат да се получат най-много три редици с дължина n.

Единствено от редиците с дължина $n+1$ с редуващи се 0 и 1 (или 1 и 0) могат да се получат $n+1$ редици с дължина n. При това, ако и двете редици са в A, то редиците с дължина n с редуващи се 0 и 1 или 1 и 0 се получават по два начина. Тогава

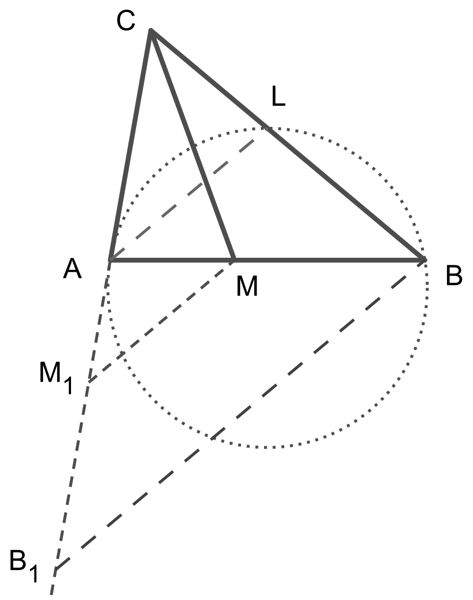
$$2^n \leq 6 + (n+1) + (a_n - 3)n \iff \frac{2^n + 2n - 7}{n} \leq a_n.$$

Оценяване. (7 точки) 3 т. за $a_n \leq 2^{n-1}$; 4 т. за $\dfrac{2^n + 2n - 7}{n} \leq a_n$.

Задача 12.1. Даден е триъгълник ABC, за който $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и $\measuredangle BAC = 80^\circ$. Върху страната AB е избрана точка M, такава че $\measuredangle AMC = 70^\circ$. Ако $AM + AC = BC$, да се докаже, че $a^2 = b(b + c)$.

Решение. Върху лъча $CA^{\to}$ построяваме точка M_1 такава, че $AM_1 = AM$ или $CM_1 = BC$. Тогава триъгълникът M_1MA е равнобедрен и $\measuredangle AM_1M = \measuredangle AMM_1 = \dfrac{1}{2}\measuredangle BAC = 40^\circ$.

Сега триъгълниците CM_1M и CBM са еднакви по четвърти признак ($CM_1 = CB$, CM-обща, $\measuredangle CMM_1 = \measuredangle CMB = 110°$).
Така получаваме, че $\measuredangle ABC = \measuredangle CM_1M = 40°$ и $\measuredangle ACB = 60°$.



Сега равенството $a^2 = b(b + c)$ следва от факта, че $\alpha = 2\beta$ (в.ж. **Лема 1.**)

Лема1. *Ако в $\triangle ABC$ за мерките на ъглите му е в сила равенството $\alpha = 2\beta$, то между страните му съществува следната зависимост $a^2 = b(b + c)$.*

Ето няколко различни доказателства на това твърдение.

Доказателство 1. Построяваме ъглополовящата AL на $\measuredangle BAC$, тогава $\measuredangle LBA = \measuredangle BAL = \measuredangle LAC = \beta$ и от свойството на ъглополващата имаме $CL = \dfrac{ab}{b+c}$.
Нека сега разгледаме окръжността, описана около $\triangle ABL$. В нея за вписания $\measuredangle LBA$ имаме $\measuredangle LBA = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AL} = \beta$ или $\overset{\frown}{AL} = 2\beta$. С тази дъга се измерва и периферният ъгъл с рамо AL и връх точката A, т.е. той е равен на β, но $\measuredangle LAC$ също е равен на β и следователно той е периферен, а CA е допирателна към окръжността.
Така получаваме $AC^2 = CL \cdot CB$. Сега след заместване на $CL = \dfrac{ab}{b+c}$ последователно имаме $b^2 = \dfrac{ab}{b+c}\,a$, $a^2b = b^2(b + c)$ или $a^2 = b(b + c)$.

Доказателство 2. Построяваме ъглополовящата AL на $\measuredangle BAC$, тогава имаме $CL = \dfrac{ab}{b+c}$, $BL = \dfrac{ac}{b+c}$ и $\measuredangle LBA = \measuredangle BAL = \beta$, т.е. $\triangle ABL$ е равнобедрен и $AL = BL$.

Сега от формулата за ъглополовящата последователно получаваме $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$, $\left(\dfrac{ac}{b+c}\right)^2 = c\, b - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$, $a^2(c^2+bc) = (b(b+c))(c(b+c))$ или $a^2 = b(b+c)$.

Доказателство 3. Върху лъча $CA^{\rightarrow}$ построяваме точка B_1 такава, че $AB_1 = AB$ или $CB_1 = b + c$.
Така в равнобедрения $\triangle B_1BA$ имаме $\measuredangle AB_1B = \measuredangle B_1BA$ и тяхната сума е равна на външния ъгъл $\measuredangle BAC = 2\beta$, т.е. $\measuredangle AB_1B = \measuredangle B_1BA = \beta$ и $\measuredangle B_1BC = \measuredangle B_1BA + \measuredangle ABC = 2\beta$.
Сега от $\triangle ABC \sim \triangle BB_1C$ получаваме $\dfrac{BC}{B_1C} = \dfrac{AC}{BC}$, $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{a}$ или $a^2 = b(b+c)$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за $\measuredangle ACB = 60^\circ$; 3 т. за доказване на лемата.

Задача 12.2. Да се реши уравнението $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Решение. Нека означим с $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Лесно се проверява, че $f(x) < f(-2) = -3 < 0$ за всяко $x < -2$, както и $f(x) > f(2) = 1 > 0$ за всяко $x > 2$. Следователно, търсим решенията в интервала $x \in [-2, 2]$. Ще докажем, че уравнението има три корена от вида $x = 2\cos\alpha$. Тогава за α получаваме $8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = 1$, което е еквивалентно на $\cos 3\alpha = \frac{1}{2} = \cos(\pi/3) = \cos(7\pi/3) = \cos(13\pi/3)$, откъдето получаваме $\alpha = \pi/9, 7\pi/9, 13\pi/9$ и $2\cos\alpha = 2\cos\pi/9, 2\cos 7\pi/9, 2\cos 13\pi/9$, които са различни. Тъй като уравнението е от трета степен, то има най-много 3 реални корена и следователно те са точно $2\cos\pi/9, 2\cos 7\pi/9, 2\cos 13\pi/9$.

Оценяване. (6 точки) 4 т. за полагането $x = 2\cos\alpha$ и получаването на $\alpha = \{\pi/9, 7\pi/9, 13\pi/9\}$; 2 т. за довършване. Ако е доказано, че уравнението има 3 реални корена, но няма никакъв друг съществен напредък се присъждат 2 точки.

Задача 12.3. Нека P е полином с реални коефициенти, такъв че за всяко естествено число n, числото $P(n)$ е цяло. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_k$ са различни прости числа със свойството, че за всяко естествено число n числото $P(n)$ се дели на поне едно от $p_1, \ldots, p_k$. Да се докаже, че поне едно от числата $p_1, \ldots, p_k$ дели всяко от числата $P(n)$, където $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Първо ще докажем, че P е с рационали коефициенти. Нека d е степента на P. Да разгледаме числата $a_i = P(i)$ за $i = 1, 2, \ldots, d+1$. Нека

$$Q(x) = \sum_{l=1}^{d+1} a_k \prod_{i \neq l, 1 \leq i \leq d+1} \frac{x - i}{l - i}.$$

Тогава Q е от степен най-много d и $Q(i) = a_i$ за $1 \leq i \leq d+1$ и т.к $a_l \in \mathbb{Z}$ за всяко k, то Q е с рационални коефициенти. Понеже $P(i) = Q(i)$ за $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$, то всяко от числата $1, 2, \ldots, d+1$ е корен на полинома $P(x) - Q(x)$, който е от степен най-много d. Това означава, че $P(x) = Q(x)$, следователно $P \in \mathbb{Q}[X]$. Сега нека N е естествено число, такова че $NP(x) = R(x)$ е полином с цели коефициенти и нека $N = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} s$е разлагане на N, където $(s, p_1 p_2 \cdots p_k) = 1$. Нека сега допуснем, че съществуват естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, за които $P(x_l)$ не се дели на p_l за всяко $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$. От китайската теорема за остатъците следва, че съществува естествено число x, за което $x \equiv x_i \pmod{p_i^{\alpha_i+1}}$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогава за всяко $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ще имаме, че $R(x) \equiv R(x_l) \pmod{p_l^{\alpha_l+1}}$, тоест

$R(x)$ се дели на $p_l^{\alpha_l}$, но не и на $p_l^{\alpha_l+1}$. Последното означава, че $P(x) = R(x)/N$ не се дели на p_l за никое $l \in 1, 2, \dots, k$, което е противоречие с условието. Следователно съществува m, такова че $p_m | P(n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за доказване, че P е с рационални коефициенти; 3 т. за показване, че ако P е с рационални коефициенти, задачата е решена; 1 т. за обединяване на двата аргумента; За други частични наблюдения не се присъждат точки.

Задача 12.4. Нека n е естествено число. Ще наричаме един граф G *n-добър*, ако сред всеки n негови върха има поне едно ребро с краища измежду тях. Да се намери най-малкото естествено число N, такова че във всеки n-добър свързан граф с N върха, съществува цикъл, след изтриването на ребрата на който графът продължава да бъде свързан.

Решение. Първо ще докажем, че $N \geq 3n-2$. Да разгледаме графът с $3n-3$ върха, съставен от $n-1$ триъгълника с върхове (u_i, v_i, w_i) за $i = 1, 2, \dots, n-1$ и пътят $v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1}$. Лесно се проверява, че той е *добър*, но който и цикъл да изтрием от него той престава да бъде свързан.

Нека сега G е *добър* граф с $N = 3n-2$ върха. Първо ще построим покриващо дърво T на G и ще оцветим върховете му в два цвята индуктивно. Нека $T^{(k)}$ е дървото, което сме получили след добавяне на първите k върха, като $T^{(0)} = \emptyset$. Нека $M_k = G \setminus T^{(k)}$. За да получим $T^{(1)}$ избираме произволен връх от G, оцветяваме го в черно и го добавяме в $T^{(1)}$. За да получим $T^{(2)}$ избираме връх, който е съседен на върха в $T^{(1)}$(такъв има, защото G е свързан), оцветяваме го в бяло и добавяме него и реброто му към върха от $T^{(1)}$ в $T^{(2)}$. Нека допуснем, че сме построили $T^{(k)}$ за някое $k \geq 2$. Ако в $T^{(k)}$ има под $n-1$ бели върха, то за да построим $T^{(k+1)}$, избираме връх v от M_k, който е свързан с бял връх в $T^{(k)}$, ако има такъв, добавяме него и реброто от него към някой бял връх в $T^{(k)}$ и оцветяваме v в черно. Ако няма такъв връх, то избираме произволен връх от M_k, който е свързан с някой черен връх добавяме го в $T^{(k)}$ и го оцветяваме в бяло. Ако в $T^{(k)}$ има $n-1$ бели върха, то по условие от всеки връх от M_k излиза по поне едно ребро към белите върхове в $T^{(k)}$, защото по конструкция белите върхове в $T^{(k)}$ са два по два несъседни. Следователно можем да построим покриващото дърво $T^(N)$, като към T^k добавим по точно едно ребро от всеки от върховете от M_k към белите върхове в $T^{(k)}$ и оцветяваме всеки връх от M_k в черно. Лесно се съобразява, че накрая имаме покриващо дърво $T^{(N)}$, в което никои два върха от един и същи цвят не са съседни и има най-много $n-1$ бели върхове. Тогава в $T^{(N)}$ има поне $2n-1$ черни върхове. Да разгледаме подрафът H на G, съставен от черните върхове в $T^{(N)}$. Нека H съдържа m свързани компоненти $S_1, S_2, \dots, S_m$. Да вземем покриващи дървета $T_1, T_2, \dots, T_m$ в $S_1, S_2, \dots, S_m$ съответно. Тогава можем да оцветим върховете във всяко от $T_1, \dots, T_m$ в синьо и червено, така че всеки връх да е в различен цвят от този на съседите си. Тогава поне n върха от H ще са оцветени в един от тези цветове. По условие измежду тях трябва да има ребро, но то не може да бъде межу различни компоненти(защото не са свързани) и значи съществува $s \in \{1, \dots, m\}$ такова че в S_s има поне още едно ребро, което не е в T_s(защото върховете от един и същи цвят не са свързани в $T_1, T_2, \dots, T_m$). Това означава, че S_s съдържа цикъл. Ако изтрием ребрата на този цикъл няма да сме изтрили ребра от $T^{(N)}$, защото никои два върха в H не са свързани с ребро в $T^{(N)}$. Така след изтриването на ребрата на този цикъл G съдържа $T^{(N)}$, следователно остава свързан.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $N \geq 3n - 2$; 2 т. за оцветяване на покриващо дърво; 4 т. за довършване.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.3, 9.3 ($\approx$ 10.3), 10.1 – Мирослав Маринов; 9.1 – Станислав Харизанов; 9.2 – Иван Ангелов; 9.4 – Галин Тотев; 10.2 – Катерина Велчева; 10.4 – Александър Иванов и Драгомир Грозев; 11.1 – Аделина Чопанова; 11.2, 11.3, 11.4 – Емил Колев; 12.1 – Веселин Гушев 12.2, 12.3 – Кристиян Василев; 12.4 – Кристиян Василев и Константин Гаров.