СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
РЕГИОНАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ОБРАЗОВАНИЕТО – ЯМБОЛ
ПРОФИЛИРАНА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АТАНАС РАДЕВ” – ЯМБОЛ

ШЕСТО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

„РОМАН ХАЙНАЦКИ” – 2017 г.

21.01.2017

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IV КЛАС

4.1. Един пуловер струва колкото две ризи, три ризи струват колкото четири шалчета. След като закупих един пуловер, пет ризи и седем шалчета, платих 294 лева. По колко лева струва всяка една от тези дрехи?

Решение: Понеже един пуловер струва колкото две ризи, то седем ризи и седем шалчета струват 294 лева, откъдето една риза и едно шалче струват 294 : 7 = 42 лв. Три ризи и три шалчета струват 42 х 3 = 126 лв., следователно седем шалчета струват 126 лв., а едно шалче – 126 : 7 = 18 лв. Оттук една риза струва 24 лв., а един пуловер – 48 лв.

4.2. Да се намери броят на числата от 1 до 900, които не съдържат нито цифрата 2, нито цифрата 3 в техния запис.

Решение: Измежду числата от 1 до 100 тези, в записа на които участват цифрите 2 или 3 са 36 – по 2 измежду всеки десет с цифра на десетиците, различна от 2 или 3 и още 20 с цифра на десетиците 2 или 3. От 200 до 299 и от 300 до 399 всички числа съдържат в записа си 2 или 3. Такива числа са 200 на брой. В останалите стотици с първа цифра 1, 4, 5, 6,7 и 8 отново имаме по 36 такива числа, общо 216 на брой. Така търсеният брой числа, които съдържат в записа си цифрите 2 или 3, са 452. Следователно, търсеният брой числа е 900 – 452 = 448.

4.3. Числата, които се записват само с цифрите 1, 3, 7 и 9, са подредени по големина, т.е. 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 31, 33, 37, 39, 71 и т.н.

а) Да се намери броят на тези от числата, които са по-малки от 2017.

б) Кое е числото, поставено на 101 място в горната последователност?

Решение: а) В последователността има 4 едноцифрени числа, 16 двуцифрени и 64 трицифрени. Следователно числата, по-малки от 1000, в разглежданата последователност са 84. Числата с цифра на хилядите 1 от последователността са на брой, колкото трицифрените от разглеждания вид, т.е. 64. Числата с цифра на хилядите 2 не участват в последователността. Търсеният брой е 84+64=148.

б) Понеже 101>84, то търсеното число е четирицифрено с цифра на хилядите 1. От 1111 до 1199 имаме 16 числа от последователността и търсеното число е 1311.

4.4. На мястото на буквите в квадратчетата да се поставят числа, различни от 0, така че произведението на всеки три числа от всеки ред, всеки стълб и всеки диагонал да е едно и също.

4	a	b
18	12	c
d	e	f

Решение: От 4.18=12.b получаваме $b=6$. От 4.12=$b.c=6.c$ намираме $c=8$. Сега вече изчисляваме произведенията на числата в редовете, стълбовете и диагоналите, което е 18.12.8=1728. Оттук лесно намираме останалите стойности - $a=72, d=24, e=2, f=36$.

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
РЕГИОНАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ОБРАЗОВАНИЕТО – ЯМБОЛ
ПРОФИЛИРАНА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АТАНАС РАДЕВ" – ЯМБОЛ

ШЕСТО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

„РОМАН ХАЙНАЦКИ" – 2017 г.

21.01.2017

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА V КЛАС

5.1. Симона постъпи в първи клас на седем години. Тогава сборът от годините на родителите й беше 60. Сега сборът от годините на тримата, разделен на годините на Симона, дава частно 6 и остатък 10. Кой клас е сега Симона, ако тя е преминавала всяка година успешно в следващия клас?
Решение: Нека означим с k класът, в който е сега Симона. Тогава $67+3k=6.(7+k)+10$, откъдето $k=5$.

5.2. Едно число наричаме добро, ако то се дели на две, на три или на пет. Да се намери броят на добрите числа, по-малки от 2017.
Решение: Да отбележим, че ако едно число a е добро, то и $a+30$ също е добро и обратно, ако не е било добро, то и $a+30$ също няма да е добро. Това показва, че броят на добрите числа от 1 до 30, от 31 до 60 и т.н. е един и същ. Проверяваме, че той е 22. От равенството 2017 = 30.67 + 7 следва, че имаме 67.22 + 5 = 1479 добри числа. Допълнителните пет числа след 2010 са 2012, 2013, 2014, 2015 и 2016.

5.3. Нека $n>1$ е естествено число и A е число, записано с n ненулеви цифри. Нека B е също n- цифрено число, записано с цифрите на A, но в друг ред, и сборът $A+B$ е число, записано с една единица и n нули след нея.

а) Да се даде пример на такива числа при $n=3$;

б) Да се докаже, че n е нечетно.

Решение: а) Един такъв пример е 185 + 815 = 1000.

б) Нека $A=\overline{a_1a_2...a_n}$ и $B=\overline{b_1b_2...b_n}$. Тогава $a_n+b_n=10$ и $a_{n-1}+b_{n-1}=...=a_1+b_1=9$. Следователно $9.(n-1)+10=a_1+a_2+...+a_n+b_1+b_2+...+b_n=2(a_1+a_2+...+a_n)$, откъдето n е нечетно число.

5.4. Да се докаже, че измежду всеки 51 четни числа могат да се намерят две, такива че произведението на сбора и разликата им да се дели 400. Вярно ли е твърдението за 51 нечетни числа?
Решение: Четните числа при деление на 100 дават остатъците 0, 2, 4, …, 98, които са 50 на брой. Следователно ще има поне две числа измежду дадените 51, които дават един и същ остатък при деление на 100, т.е. тяхната разлика се дели на 100. Ако някое от така установените две числа се дели на 4, то и другото се дели на 4, защото разликата им се дели на 100. Ако едното не се дели на 4, т.е. дава остатък 2 при деление на 4, то и другото също дава остатък 2 при деление на 4. Това означава, че и в двата възможни случая сборът им се дели на 4.

Ако числата са нечетни можем да установим само, че има поне две числа сборът по разликата им се дели на 200, но може да не се дели на 400. Например 1 и 101.

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
РЕГИОНАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ОБРАЗОВАНИЕТО – ЯМБОЛ
ПРОФИЛИРАНА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АТАНАС РАДЕВ” – ЯМБОЛ

ШЕСТО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

„РОМАН ХАЙНАЦКИ” – 2017 г.

21.01.2017

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VI КЛАС

6.1. Докажете, че

$$A=100\left(\frac{7}{1.2}+\frac{7}{2.3}+...+\frac{7}{99.100}\right)+589\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{587.589}\right)$$

е трицифрено естествено число, записано с различни цифри.

Решение: Представяме числото във вида

$$A=700\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)+\frac{1}{2}.589\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{587}-\frac{1}{589}\right)=700.\frac{99}{100}+\frac{1}{2}.589\frac{588}{589}$$

Следователно $A=987$.

6.2. В равнината е зададена правоъгълна координатна система с единична отсечка 1 см и са построени всички хоризонтални и вертикални прави линии, минаващи през целочислените точки на двете оси (така наречената квадратна мрежа). Мравка се движи по правите на мрежата, като спазва следните правила: има право да сменя посоката си на движение само във връх на мрежата, т.е. в точка с целочислени координати, като във всяка такава точка може да продължи в каквато посока пожелае – надясно, наляво, нагоре или надолу.

Мравката тръгва от точката $O(0,0)$ и завършва пътешествието си в точката $A(1,1)$. Възможно ли е да е изминала:

а) 1000 см;

б) 1001 см?

Решение. Да означим за удобство посоките на движение с изток (надясно), запад (наляво), север (нагоре) и юг (надолу).

а) Възможно е и то по много начини. Един от най-глупавите маршрути е следният: мравката изминава 1 см на изток и веднага се връща 1 см на запад обратно в точката *O*. После повтаря това движение, докато навърти 998 см и накрая изминава още 1 см на изток и 1 см на север и попада в точката *A*.

б) Не е възможно. Ще покажем, че общата дължина на маршрута е четно число сантиметри и в частност не може да е равна на 1001.

Нека мравката е изминала в посока изток общо x см, на запад – общо y см, на север – общо z см и на юг – общо t см. От правилата на движение в условието следва, че x, y, z и t са цели числа. Общата дължина на маршрута е $S=x+y+z+t$.

Крайният пункт на пътешествието (точката *A*) е с 1 см на изток от началния пункт (точката *O*), тъй като абсцисата на *A* е с 1 см по-голяма от абсцисата на *O*. Това означава, че по време на пътешествието мравката е изминала на изток сумарно с 1 см повече, отколкото е изминала на запад. С други думи, в сила е равенството $x=y+1$.

Също така, точката *A* е с 1 см на север от точката *O* (ординатата на *A* е с 1 см по-голяма от ординатата на *O*), откъдето по аналогичен начин заключаваме, че $z=t+1$. Тогава дължината на целия път е

$$S=x+y+z+t=(y+1)+y+(t+1)+t=2(y+t+1).$$

Така *S* е четно число и значи не може да е равно на 1001.

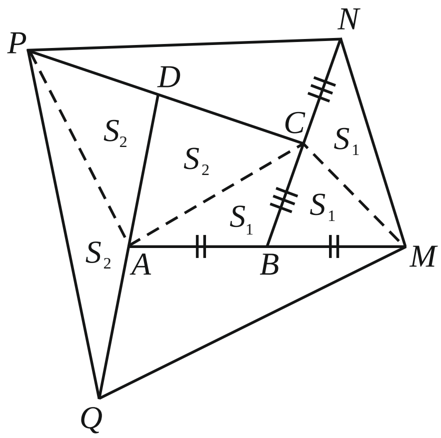
6.3. Нека $ABCD$ е четириъгълник с лице S. Върху продължението на страната AB нанасяме точка M (B е между A и M), така че $AB = BM$. По същия начин върху продължението на BC нанасяме точка N (C е между B и N), така че $BC = CN$, после върху продължението на CD нанасяме точка P (D е между C и P), така че $CD = DP$ и накрая върху продължението на DA нанасяме точка Q (A е между D и Q), така че $DA = AQ$. Да се пресметне лицето на четириъгълника $MNPQ$ при условие, че:

а) $ABCD$ е квадрат;

б) $ABCD$ е произволен изпъкнал четириъгълник.

Решение: Ще докажем, че $S_{MNPQ} = 5S$.

Ако $ABCD$ е квадрат, след като си направим чертеж, решението става почти очевидно. Ето защо направо ще разгледаме случая, когато $ABCD$ е произволен четириъгълник.
Да построим диагонала AC, отсечките MC, PA и да означим $S_{ABC} = S_1$, $S_{ADC} = S_2$ (очевидно $S_1 + S_2 = S$).



Разглеждаме $\triangle AMC$. По условие $AB = BM$, така че CB е медиана и тогава $S_{BMC} = S_{ABC} = S_1$. Сега разглеждаме $\triangle MNB$, в който (пак от условието) отсечката MC е медиана и значи $S_{MNC} = S_{BMC} = S_1$.
Следователно

$$S_{MNB} = S_{BMC} + S_{MNC} = 2S_1 .$$

По аналогичен начин (разглеждайки първо $\triangle CPA$, а след това $\triangle PQD$) заключаваме, че $S_{PQD} = 2S_2$.
Тогава

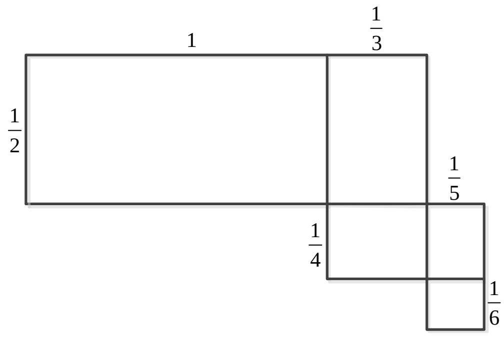
$$S_{MNB} + S_{PQD} = 2S_1 + 2S_2 = 2S .$$

С аналогични разсъждения (като построим диагонала BD и отсечките ND и QB) получаваме, че $S_{NPC} + S_{QMA} = 2S$.

Накрая имаме

$$S_{MNPQ} = (S_{MNB} + S_{PQD}) + (S_{NPC} + S_{QMA}) + S_{ABCD} = 2S + 2S + S = 5S .$$

6.4. Последователно са построени съседни правоъгълници както е показано на фигурата (два правоъгълника се наричат съседни, ако имат обща страна). Дължините на страните на правоъгълниците са последователно $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. Докажете, че има група от два или повече последователни съседни правоъгълници, сборът от лицата на които е $\frac{1}{3}$.



Решение: Сборът от лицата на първите правоъгълници е $1.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}.\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. Тогава сборът от лицата на няколко последователни съседни правоъгълници е $1 - \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$. Нека $\frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$, откъдето $3n - 3k = kn$, $3n - 3k - kn + 9 = 9$ или $(n+3)(3-k) = 9$. Равенството е възможно само при $n + 3 = 9$ и $3 - k = 1$, т.е.

$n=6, k=2$. Окончателно само правоъгълниците с размери $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}$ общо имат лице $\frac{1}{3}$.

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
РЕГИОНАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ОБРАЗОВАНИЕТО – ЯМБОЛ
ПРОФИЛИРАНА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АТАНАС РАДЕВ” – ЯМБОЛ

ШЕСТО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

„РОМАН ХАЙНАЦКИ” – 2017 г.

21.01.2017

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VII КЛАС

7.1. В равнината е зададена правоъгълна координатна система с единична отсечка 1 см и са построени всички хоризонтални и вертикални прави линии, минаващи през целочислените точки на двете оси (така наречената квадратна мрежа). Мравка се движи по правите на мрежата, като спазва следните правила: има право да сменя посоката си на движение само във връх на мрежата, т.е. в точка с целочислени координати, като във всяка такава точка може да продължи в каквато посока пожелае – надясно, наляво, нагоре или надолу.

Мравката тръгва от точката $O(0,0)$ и завършва пътешествието си в точката $A(5,3)$. Възможно ли е да е изминала:

а) 1000 см;

б) 1001 см?

Решение: Да означим за удобство посоките на движение с изток (надясно), запад (наляво), север (нагоре) и юг (надолу).

а) Възможно е и то по много начини. Един от най-глупавите маршрути е следният: мравката изминава 1 см на изток и веднага се връща 1 см на запад обратно в точката *O*. После повтаря това движение, докато навърти 992 см и накрая изминава още 5 см на изток и 3 см на север и попада в точката *A*.

б) Не е възможно. Ще покажем, че общата дължина на маршрута е четно число сантиметри и в частност не може да е равна на 1001.

Нека мравката е изминала в посока изток общо x см, на запад – общо y см, на север – общо z см и на юг – общо t см. От правилата на движение в условието следва, че x, y, z и t са цели числа. Общата дължина на маршрута е $S=x+y+z+t$.

Крайният пункт на пътешествието (точката *A*) е с 5 см на изток от началния пункт (точката *O*), тъй като абсцисата на *A* е с 5 см по-голяма от абсцисата на *O*. Това означава, че по време на пътешествието мравката е изминала на изток сумарно с 5 см повече, отколкото е изминала на запад. С други думи, в сила е равенството $x=y+5$. Също така, точката *A* е с 3 см на север от точката *O* (ординатата на *A* е с 3 см по-голяма от ординатата на *O*), откъдето по аналогичен начин заключаваме, че $z=t+3$. Тогава дължината на целия път е

$$S=x+y+z+t=(y+5)+y+(t+3)+t=2(y+t+4).$$

Така S е четно число и значи не може да е равно на 1001.

7.2. Да се намери остатъкът при деление с 400 на числото $N=7+7^2+7^3+7^4+...+7^{2017}$

Решение: Да забележим, че $1+7^1+7^2+7^3=1+7+49+343=400$. Ако групираме събираемите по четворки, започвайки от 7^2 . Тогава последното събираемо в последната четворка е 7^{2017} . Следователно търсеният остатък е 7.

7.3. Нека $A=\{1,4,7,10,13,16,19,...,2014,2017\}$.

а) Да се намери сборът на първите 37 елемента на множеството *A*.
б) Да се докаже, че числото 2017 може да се представи като сбор на различни числа от множеството *A* и да се намери най-големият брой на събираеми в такъв сбор.

Решение: а) Сборът на първите 37 числа е равен на
$\left(3.0+1\right)+\left(3.1+1\right)+\left(3.2+1\right)+\ldots+\left(3.36+1\right)=3.\frac{36.37}{2}+37=2035$.

б) От а) следва, че търсеният брой събираеми, ако има такова представяне, и по-малък от 37, защото сборът на най-малките 37 числа е 2035. От друга страна $\left(3.k_1+1\right)+\left(3k_2+1\right)+\ldots+\left(3.k_s+1\right)=3\left(k_1+k_2+\ldots+k_s\right)+s$, което показва, че при деление на s с 3 има остатък 1. Най-голямото такова числа, което е по-малко от 37 е 34. Представяне на 2017 като сбор на 34 числа от вида $3.k+1$ може да бъде следното: $1+4+7+\ldots+97+400$.

7.4. Да се докаже, че:
а) както и да оцветим в два цвята естествените числа от 1 до 101, можем да намерим две едноцветни числа, чиято разлика е равна на 60 или на 50;
б) можем така да оцветим в два цвята всички естествени числа, че да няма две едноцветни числа, чиято разликата е равна на 60 или на 100.

Решение: Да означим двата цвята с *A* и *B*.

а) Допускаме противното, т.е. допускаме, че за някое оцветяване няма две едноцветни числа с разлика 60, както и няма две едноцветни числа с разлика 50.

Нека числото 1 е оцветено в цвят *A*.

Да разгледаме числата 1, 51, 101. Тъй като разликата на всеки две съседни числа е равна на 50, от допускането следва, че 51 е оцветено в цвят *B*, а 101 е оцветено в цвят *A*.

От друга страна, да разгледаме следната редица от числа:

1, 61, 11, 71, 21, 81, 31, 91, 41, 101.

Разликата на всеки две съседни числа от редицата е равна на 60 или на 50 и отново от допускането следва, че цветовете им се редуват:

$$A,\ B,\ A,\ B,\ A,\ B,\ A,\ B,\ A,\ B.$$

Така получаваме, че числото 101 е оцветено в цвят *B*.

Полученото противоречие показва, че първоначалното допускане не е вярно. Следователно при всяко оцветяване в два цвята на естествените числа от 1 до 101 можем да намерим две едноцветни числа, чиято разлика е равна на 60 или на 50.

б) Да разделим всички естествени числа на четворки и числата от всяка четворка да оцветим в един и същи цвят по следното правило:

първа четворка – 1, 2, 3, 4 – цвят *A*;
втора четворка – 5, 6, 7, 8 – цвят *B*;
трета четворка – 9, 10, 11, 12 – цвят *A*;
четвърта четворка – 13, 14, 15, 16 – цвят *B*;
… и така нататък.

Това оцветяване схематично може да се илюстрира по следния начин:

$$\underbrace{1,2,3,4,}_{A}\ \underbrace{5,6,7,8,}_{B}\ \underbrace{9,10,11,12,}_{A}\ \underbrace{13,14,15,16,}_{B}\ \underbrace{17,\ldots}_{A}\ .$$

Така всяка от горните четворки е снабдена с номер, като четворките с нечетни номера са оцветени в цвят *A*, а четворките с четни номера са оцветени в цвят *B*. Следователно две естествени числа са едноцветни точно когато лежат в четворки, чиито номера са с еднаква четност.

Нека сега a и b са естествени числа, като $a<b$ и $b-a=60$. Тъй като $60=15.4$, следва, че ако числото a лежи в четворка с номер k, то числото b лежи в четворка с номер $k+15$. (Например, ако $a=1,2,3$ или 4, т.е. a лежи в първата четворка, то $b=a+60=61,62,63$ или 64 и b лежи в шестнадесетата четворка.) Но номерата k и

$k+15$ са с различна четност и значи a и b са разноцветни числа. Следователно при това оцветяване няма две едноцветни числа с разлика 60.

По аналогичен начин (използвайки, че $100=25.4$ и 25 е нечетно число) заключаваме, че няма и две едноцветни числа с разлика 100.