ТЕМА 10

ХОМОТЕТИЯ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Трябва ни точка O за център и число k за коефициент.

На произволна точка A съпоставяме точката A_1 по правилото:

$$\overrightarrow{OA_1} = k.\overrightarrow{OA}$$

II. СВОЙСТВА.

Това преобразование е ПОДОБНОСТ.

- ***За окръжността на 9-те точки, или окръжността на Ойлер***

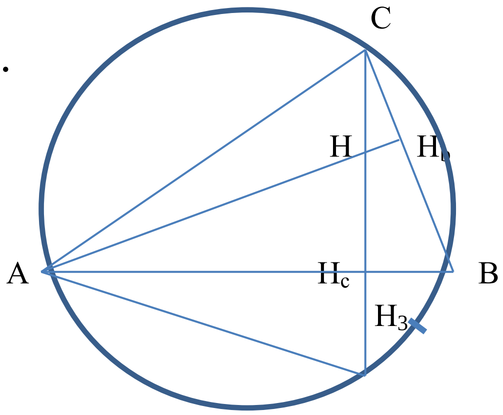
  Лема 1. Ако продължим височината CH_c в Δ ABC, с ортоцентър H, до повторното ѝ пресичане с описаната около триъгълника окръжност в точка H_3, то отсечките HH_c и H_cH_3 са с равни дължини.

  Доказателство. В Δ AHH_3 отсечката AH_c е височина и ъглополовяща, защото

  $\measuredangle H_cAC=90^0-\measuredangle B$

  $\measuredangle H_cAH_3=\measuredangle H_3CB=90_0-\measuredangle B$

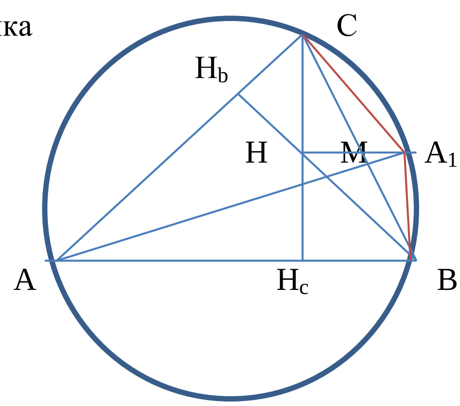
  Следователно AH_c е и медиана в този триъгълник т.е. $HH_c=H_cH_3$.



Черт.1.

  Лема 2. Точка H е ортоцентър на Δ ABC, точка M е средата на страната BC, а точка A_1 е диаметрално противоположната на върха A. Да се докаже, че точката M е средата на отсечка HA_1.

  Доказателство. Ще докажем, че четириъгълника HBA_1C е успоредник и точката M е неговия център т.е. тя е среда и на двата диагонала BC и HA_1.
  Но CH || A_1B, защото и двете отсечки са перпендикулярни на страната AB **(проверете!)**
  Отсечката BH || A_1C, защото и двете отсечки са перпендикулярни на страната AC (проверете!)
  Следователно HBA_1C е успоредник



Черт.2.

и M е среда на HA_1.

Теорема на Ойлер. За всеки Δ ABC с височини AH_a, BH_b u CH_c, с медиани AM_a, BM_b u CM_c и ортоцентър H. докажете, че деветте точки: трите среди P_a, P_b u P_c на отсечките AH, BH и CH, петите на височините H_a, H_b, H_c, и средите на страните M_a, M_b, M_c лежат на една окръжност с център в средата на отсечката, с краища ортоцентъра и центъра на описаната около триъгълника окръжност.

Доказателство.

Нека h(H; k=½) е хомотетия с център H и коефициент k= ½ .

Продължаваме височините

AH_a, BH_b u CH_c до повторното им пресичане с

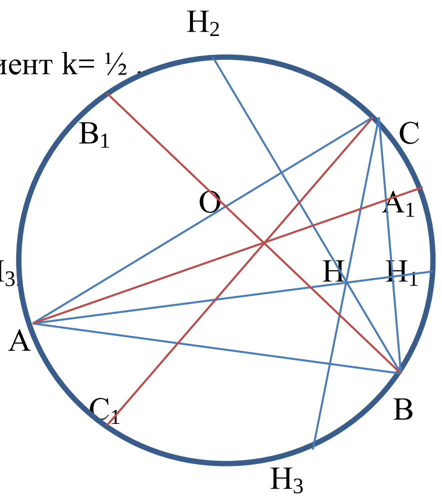
описаната окръжност съответно в точки H_1,H_2 и H_3

Построяваме диаметрите AA_1, BB_1 и CC_1.

Деветте точки: H_1, H_2, H_3, A_1, B_1, C_1 и върховете

A, B и C на триъгълника лежат на описаната

окръжност.



Чер.3.

Хомотетията ще изпрати всяка от тези точки в точка от окръжност с два пъти по-малък (k= ½) и това е окръжността на 9-те точки.

Образът на точка H_3 е петата H_c на височината CH_c (лема 1.)

Образът на точката C_1 е средата M_c на страната BC (лема 2.)

Образът на точката C е средата P_c на отсечката CH (k = ½) и т.н.

- ΔABC с ъгли ∡A=π/7, ∡B=2π/7 и ∡C=4π/7, за който Ойлер не знаел (?).

1. В Δ ABC с ъгли ∡A=π/7, ∡B=2π/7 и ∡C=4π/7, петите на ъглополовящите му AL_a, BL_b u CL_c са върхове на равнобедрен $\Delta\, L_aL_bL_c$.

Решение. Ще докажем, че $\Delta\, L_cBL_a \cong \Delta\, L_cCL_b$.

1) $L_cB=L_cC$, защото $\Delta\, L_cBC$ е равнобедрен

(пресметнете ъглите му);

2) $\measuredangle L_cBL_b=\measuredangle L_cCL_a=2\pi/7$;

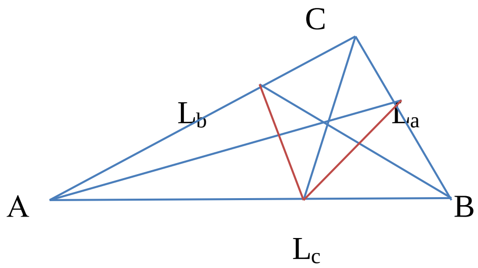
3) От свойството на ъглополовящата

$BL_b=\frac{ac}{b+c}$ u $CL_a=\frac{ab}{a+c}$

Заместваме страните a, b u c на Δ ABC

от синусова теорема съответно с

2Rsinπ/7, 2Rsin2π/7 u 2Rsin4π/7



и пресмятаме:

$\sin^2(2\pi/7)+\sin(2\pi/7)\sin(4\pi/7)=\sin^2(4\pi/7)\sin(\pi/7)$ или **Черт.4.**

$1-\cos(4\pi/7)+\cos(2\pi/7)-\cos(6\pi/7)=1-\cos(8\pi/7)+\cos(3\pi/7)-\cos(5\pi/7)$

2. За Δ ABC с ъгли $\measuredangle A=\pi/7$, $\measuredangle B=2\pi/7$ и $\measuredangle C=4\pi/7$, и ъглополовящи AL_a, BL_b u CL_c, докажете, че четириъгълникът $L_aL_bL_cC$ е вписан.

3. За Δ ABC с ъгли $\measuredangle A=\pi/7$, $\measuredangle B=2\pi/7$ и $\measuredangle C=4\pi/7$, докажете, че петите на височините му: H_a, H_b, H_c, средите на страните му: M_a, M_b, M_c, заедно с пресечната точка X между окръжността му на 9-те точки и описаната окръжност, са върхове на правилен седмоъгълник.

Решение. Нека точките $P_1,P_2,\ldots,P_7$ по окръжността (k) са върховете на правилен седмоъгълник.

Означаваме съответно с $T_1,T_2,\ldots,T_7$ средите на дъгите P_1P_2, $P_2P_3,\ldots$, P_7P_1.

Очевидно седмоъгълникът $T_1\ldots T_7$ е също правилен седмоъгълник.

Ако точката $A\equiv P_1$, точката $B\equiv P_5$

Точката $C\equiv P_6$, то ΔABC е

с ъгли $\measuredangle A=\pi/7$, $\measuredangle B=2\pi/7$ и $\measuredangle C=4\pi/7$.

Вземаме означенията от черт.3.

и забелязваме, че точката $H_3\equiv T_4$,

защото $\measuredangle H_cCB=3\pi/14$.

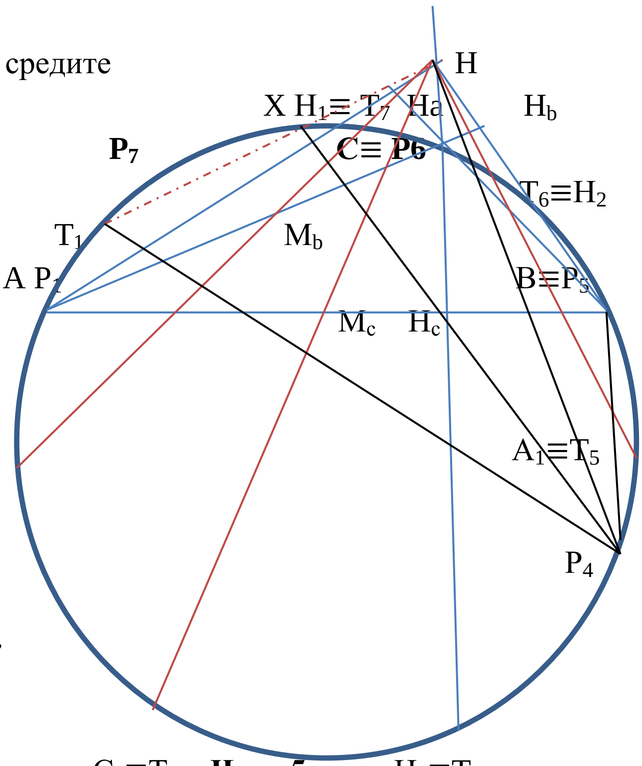
Точката $C_1\equiv T_3$, защото P_6T_3

е диаметър.

По същата причина точката $T_2\equiv B_1$,

защото T_2P_5 е диаметър

Точката $T_6\equiv H_2$, а точката $T_7\equiv H_1$.



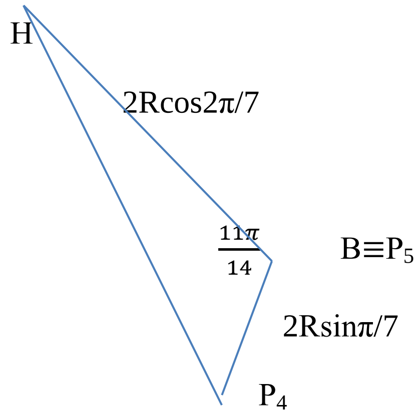
Черт.5.

Така при хомотетията h(H; k= ½) всеки от върховете на правилния седмоъгълник T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 и T_7 се изобразява в една от точките M_b, M_c, H_c, M_a, H_b u H_a. Остава да докажем, че върхът T_1 се изобразява в точката X, която е обща за окръжността на 9-те точки и описаната окръжност.

За тази цел е достатъчно да докажем, че точката X е среда на отсечката T_1H.

Но P_4T_1 е диаметър и $\measuredangle T_1XP_4=90^0$ т.е. отсечката P_4X е височина и отсечката P_4X ще е медиана само ако триъгълникът P_4T_1H е равнобедрен или $HP_4=2R$.

С косинусова теорема от $\Delta\, HBP_4$ ще пресметнем дължината HP_4.



Черт.6. Пресмятаме $\measuredangle P_4BH$ чрез дъгите P_4B от синусова теорема и $BH=2R\cos\measuredangle B$.

От косинусова теорема за $\Delta\, HBP_4$ намираме:

$HP_4^2=4R^2(\cos^2(2\pi/7)+\sin^2(\pi/7)-2\sin(\pi/7)\cos(2\pi/7)\cos(11\pi/14)=$ $4R^2(\cos^2(2\pi/7)+\sin^2(\pi/7)+2\sin(\pi/7)\cos(2\pi/7)\sin(2\pi/7)= 2R^2(1+\cos4\pi/7+1-$ $\cos2\pi/7+2\sin\pi/7\sin4\pi/7)=2R^2(2+\cos4\pi/7-\cos2\pi/7+\cos3\pi/7-\cos5\pi/7)=4R^2=HP_4^2$.

Т.е. средата X на отсечката T_1H лежи на описаната окръжност от друга страна чрез хомотетията h(H) изпраща точката T_1 в точка от окръжността на 9-те точки или точката X лежи и на окръжността на 9-те точки.

Още няколко задачи, за да упражним хомотетията.

4. Да се докаже, че хомотетията с център медицентъра на триъгълника и коефициент минус една втора т.е. $h\,(G;\ k=-\tfrac{1}{2})$ също изпраща описаната около триъгълника окръжност в окръжността му на 9-те точки.

5. Докажете, че във всеки триъгълник ортоцентър, медицентър и център на описаната окръжност лежат на една права, наречена права на Ойлер (!), където лежи и центърът на окръжността на 9-те точки.

6. За $\Delta\, ABC$ с ъгли $\measuredangle A=\pi/7$, $\measuredangle B=2\pi/7$ и $\measuredangle C=4\pi/7$, с ортоцентър H и точки P_4 и T_1 от описаната му окръжност, за които $BP_4=BC$ и P_4T_1 е диаметър на описаната окръжност, да се докаже, че $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, HP_4T_1$ имат общ медицентър.

7. Докажете, с помощта на хомотетията $h(G;\ k=-\tfrac{1}{2})$ за $\Delta\, ABC$ с ъгли $\measuredangle A=\pi/7$, $\measuredangle B=2\pi/7$ и $\measuredangle C=4\pi/7$, че петите на височините му: H_a, H_b, H_c, средите на страните му: M_a, M_b, M_c, заедно с пресечната точка X между окръжността му на 9-те точки и описаната окръжност, са върхове на правилен седмоъгълник.
Или още.

8. За $\Delta\, ABC$ с ъгли $\measuredangle A=\pi/7$, $\measuredangle B=2\pi/7$ и $\measuredangle C=4\pi/7$, с радиус на описаната окръжност R и с радиус r_a на външно вписаната окръжност спрямо страната BC е вярно равенството: $R=2r_a$.

9. За Δ ABC с ъгли ∡A=π/7, ∡B=2π/7 и ∡C=4π/7, с радиус на описаната окръжност R и център O, да се докаже, че разстоянието от ортоцентъра H до центъра O е равно на: OH=$R\sqrt{2}$.

10. За Δ ABC с ъгли ∡A=π/7, ∡B=2π/7 и ∡C=4π/7 и с височини AH_a, BH_b u CH_c триъгълниците ΔABC и Δ $H_aH_bH_c$ са подобни.

11. За Δ ABC с ъгли ∡A=π/7, ∡B=2π/7 и ∡C=4π/7, с пресечна точка X между описаната окръжност и окръжността на 9-те точки разстоянията от точката X до средите на страните му: M_a, M_b u M_c са съответно равни на страните на $\Delta M_aM_bM_c$.